higher education & training
Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

T1040(**A**)(M28)T

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186)

28 Maart 2018 (X-Vraestel)
09:00–12:00

Nieprogrammeerbare sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord AL die vrae.
2. Lees AL die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Vrae kan in enige volgorde beantwoord word maar onderafdelings van vrae moet bymekaar gehou word .
5. Toon ALLE tussenstappe. Rond berekeninge tot DRIE desimale plekke af.
6. AL die formules wat gebruik word moet neer geskryf word.
7. Vrae moet met BLOU of SWART ink beantwoord word.
8. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 Gegee: $z = y^x$ bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

1.2 Gegee: $z = \tan x \sec y$ bewys dat $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

1.3 Indien $y = 2\sin\theta$ en $x = 2\cos\theta$ bepaal $\dfrac{dy}{dx}$ waar $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

(3 × 2) **[6]**

VRAAG 2

Bepaal: $\int y\,dx$ indien :

2.1 $y = \sin^4 4x$ (5)

2.2 $y = \dfrac{\cos 3x}{e^{2x}}$ (5)

2.3 $y = \tan^3 5x\left(\sec^2 5x - 1\right)$ (4)

2.4 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 3x - x^2}}$ (4)

[18]

VRAAG 3

Gebruik parsiële breuke om die volgende te integreer:

3.1 $\displaystyle\int \frac{(x+3)(x+4)}{(x+1)(x-2)}dx$

3.2 $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 2x - 4}{(2x^2+1)(x-1)}dx$

(2 × 6) **[12]**

VRAAG 4

4.1 Bepaal die algemene oplossing van:

$$x\frac{dy}{dx}+2y=xe^{x}$$

(5)

4.2 Vind die partikuliere oplossing van :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=2e^{x} \quad \text{if } y=1 \text{ when } x=0 \text{ and } \frac{dy}{dx}=0 \text{ when } x=0$$

(7)

[12]

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Die snypunte van $x^2+y^2=13$ en $y=\frac{3}{4}x^2$ word gegee as (-2;3) en (2;3).

Maak 'n netjiese skets van die twee grafieke en toon die area wat deur die twee kromme en die y-as in die eerste kwadrant begrens word. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die area te bereken. (2)

5.1.2 Bereken die area wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is. (4)

5.2 5.2.1 Bepaal die snypunt van $y=4x-x^2$ en $y=x$.

Maak 'n netjiese skets van die twee grafieke en toon die area wat deur die grafieke ingesluit word. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume te bereken wanneer die area om die *x*-as gedraai word. (3)

5.2.2 Bereken die volume wat gegenereer word wanneer die area wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is om die *x*-as gedraai word. (4)

5.2.3 Bereken die afstand van die omwentelingsliggaam se swaartepunt van die y-as wat verkry is wanneer die area in VRAAG 5.2.1 om die *x*-as draai. (5)

5.3 5.3.1 Skets die grafiek van $y=\sin 2x$ vir $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. Toon die ingeslote area wat deur die grafiek en die x-as begrens is. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die area en die tweede moment van area te bereken. (2)

5.3.2 Bereken die area beskryf in VRAAG 5.3.1. (3)

5.3.3 Bereken die tweede moment van area om die y-as van die area beskryf in VRAAG 5.3.1. (5)

5.4 5.4.1 'n Vertikale sluis in die vorm van 'n parabool word in 'n damwal geplaas. Die sluis is 7 m wyd aan die bopunt en dit lê 2 m onder die wateroppervlak. Die sluis is 4 m hoog.

Maak 'n netjiese skets van die sluis en toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die eerste- en tweede area moment van die sluis om die watervlak te bereken. Bereken die verhouding tussen die veranderlikes. (4)

5.4.2 Bereken die eerste area moment van die sluis om die watervlak. (3)

5.4.3 Bereken die tweede area moment van die sluis om die watervlak en daarvolgens die diepte van die drukpunt op die sluis. (5)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme $y = \ln(\sec x)$ van $x = 0$ tot $x = \dfrac{\pi}{3}$.

6.2 Bereken die oppervlakarea gegenereer wanneer die kromme gegee by $x = 2\cos\theta$ en $y = 2\sin\theta$ vir $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ om die *y*-as draai.

(2 × 6) **[12]**

TOTAAL: 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige ander toepaslike formule mag gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\text{cosec } x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\,f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n \neq -1)$
ax^n	$a\,\frac{d}{dx}\,x^n$	$a\int x^n\,dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}\,(ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}\,(dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}.\frac{d}{dx}\,ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\,\frac{d}{dx}\,f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}\,f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}.\frac{d}{dx}\,f(x)$	-
$\sin ax$	$a\cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a\sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec(ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\,\mathrm{cosec}^2\,ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sin(ax)]+C$
$\sec ax$	$a\sec ax\tan ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec ax+\tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\,ax$	$-a\,\mathrm{cosec}\,ax\cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\text{cosec}^2 f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \tan f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\text{cosec}\, f(x)$	$-\text{cosec}\, f(x) \cot f(x)\, .\; f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\text{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax) - x + C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cot^2(ax)$	-	$-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\, f(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a + bx}{a - bx}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$$

Toepassing van integrasie

AREAS

$$A_x = \int_a^b y\,dx\ ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A_y = \int_a^b x\,dy\ ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$$

VOLUMES

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \,; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \,; V_x = 2\pi \int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \,; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \,; V_y = 2\pi \int_a^b xydx$$

AREA MOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROÏED

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A} \,; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE MOMENT VAN AREA

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

VOLUME MOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

SWAARTEPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKELVORMIGE LAMEN

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b x^4 dy$$

MIDDELPUNT VAN VLOEISTOFDRUK

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\,(cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_x = \int_u^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore\ ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$