higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

T1040**(A)**(M29)T

NASIONALE SERTIFIKAAT

Wiskunde N6

(16030186)

29 Maart 2019 (X-Vraestel)
09:00–12:00

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord AL die vrae.
2. Lees AL die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Hou onderafdelings van vrae bymekaar.
5. Rond ALLE berekeninge af tot DRIE desimale plekke.
6. Gebruik die korrekte simbole en eenhede.
7. Begin elke vraag op 'n nuwe bladsy.
8. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 Gegee: $z = \tan(xy)$

Bepaal $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

1.2 'n Reghoek se lengte is x en die breedte y.

Bereken die veranderking in die lengte van die reghoek se hoeklyn ('diagonal') r indien die lengte verander van 20 cm na 22 cm en die breedte van 10 cm na 8 cm.

(2 × 3) **[6]**

VRAAG 2

Bepaal $\int y dx$ if

2.1 $y = 1 - \tan^4 3x$ (4)

2.2 $y = x(\ln x)^2$ (4)

2.3 $(1 - 2sin^2 2x)^2$ (4)

2.4 $y = \frac{\sin 2x}{e^{2x}}$ (4)

2.5 $y = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$ (2)

[18]

VRAAG 3

Use parsieelbreuke ('partial fractions') om die volgende integrale te bereken:

3.1 $\int \frac{x^2 + x - 7}{x^2 + x - 6} dx$

3.2 $\int \frac{7x^2 - 12x + 8}{(2x-1)(x^2 - 2x + 2)} dx$

(2 × 6) **[12]**

VRAAG 4

4.1 Bepaal die partikuliere oplossing van $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = 3x - \sin x + \cos x$ indien $x = 1$ wanneer $y = 1$

4.2 Bepaal die algemene oplossing van $6\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = x^2$

(2 × 6) **[12]**

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Skets die grafieke van $x^2 + 4y^2 = 16$ en $x^2 + y^2 = 16$. Toon die area in die eerste kwadrant wat deur die grafieke begrens is. Toon 'n verteenwoordigende strook loodreg op die *x*-as. (3)

5.1.2 Bereken die area wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is. (5)

5.1.3 Bereken die area wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is se afstand van die *y*-as se swaartepunt af. (5)

5.2 5.2.1 Maak 'n netjiese skets van die grafiek van $y = \sin x$ vir $0 \leq x \leq \pi$. Toon die area wat begrens is deur die grafiek met die lyne $y = 1$ en $x = 0$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume te bereken wat voortgebring word wanneer hierdie area om die *x*-as roteer. (2)

5.2.2 Bereken die volume wat voortgebring word wanneer die area wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is om die *x*-as roteer. (4)

5.3 5.3.1 Maak 'n netjiese skets van die kromme $y = e^x$ en toon die area wat begrens is deur die kromme, the *x*-as en die lyne $x = -1$ en $x = 1$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume te bereken wanneer hierdie area om die *x*-as roteer. (3)

5.3.2 Bereken die volume indien die area wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is om die *x*-as roteer. (3)

5.3.3 Bereken die traagheidsmoment van die ruimteliggaam ('solid') om die x-as wat verkry word wanneer die area wat in VRAAG 5.3.1 beskryf word om die x-as roteer. Druk die antwoord uit in terme van massa. (5)

5.4 5.4.1 'n Vertikale plaat in die vorm van 'n trapesium word in 'n damwal geïnstalleer. Die bokant van die plaat is 10 m breed en lê 1 m onder die watervlak. Die onderkant van die plaat is 8 m breed en die hoogte van die plaat is 3 m.

Maak 'n skets van die plaat en toon die verteenwoordigende strook wat jy sal gebruik om die eerste moment en die tweede moment van die area om die watervlak te bereken. (2)

5.4.2 Bereken die verhouding tussen x en y asook die areamoment van die plaat om die watervlak. (4)

5.4.3 Bereken die tweede moment van die plaat se area om die watervlak asook die diepte van die drukmiddelpunt op die plaat. (4)
[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme gegee deur $x = e^{\theta}$ en $y = e^{\theta}cos\theta$ van $\theta = 0$ tot $\theta = \frac{\pi}{3}$

6.2 Bereken die oppervlakte van die area wat voortgebring word wanneer die kromme $y = \frac{3}{2}x$ tussen die punte (2;3) en (4;6) om die x-as roteer.

(2 × 6) **[12]**

TOTAAL 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige ander toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\ f(x)$	$\int f(x)dx$
x^{n}	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n \neq -1)$
ax^{n}	$a\ \frac{d}{dx}\ x^{n}$	$a \int x^{n}\ dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}\ (ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}\left(ax+b\right)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}\ (dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}\left(dx+e\right)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}\ ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\ \frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$\sin ax$	$a \cos ax$	$-\ \frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a \sec^{2} ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\sec\left(ax\right)\right]+C$
$\cot ax$	$-a\ \mathrm{cosec}^{2}\ ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\sin\left(ax\right)\right]+C$
$\sec ax$	$a \sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\sec ax+\tan ax\right]+C$
$\mathrm{cosec}\ ax$	$-a\ \mathrm{cosec}\ ax \cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\ f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\mathrm{cosec}^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x)\tan f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\mathrm{cosec}\, f(x)$	$-\mathrm{cosec}\, f(x)\cot f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\mathrm{cosec}^{-1} f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\cos^2(ax)$	-	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\tan^2(ax)$	-	$\dfrac{1}{a}\tan(ax)-x+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\ f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cot^2(ax)$	-	$-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

$\int [f(x)]^n\ f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\ f(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\ dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$

Toepassing van integrasie

AREAS

$A_x = \int_a^b y\,dx\ ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$

$A_y = \int_a^b x\,dy\ ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy$

VOLUMES

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \,; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \,; V_x = 2\pi \int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \,; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \,; V_y = 2\pi \int_a^b xydx$$

AREAMOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROïEDE ('CENTROID')

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A} \,; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE AREAMOMENTE ('SECOND MOMENT OF AREA')

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

SWAARTEPUNT ('CENTRE OF GRAVITY')

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE ('MOMENTS OF INERTIA')

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKELVORMIGE LAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b x^4 dy$$

VLOEISTOFDRUKPUNT ('CENTRE OF FLUID PRESSURE')

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\ (cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

$$A_x = \int_u^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore\ ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx$$

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A+Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$