higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186)

6 April 2021 (X-vraestel)
09:00–12:00

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye, en 'n formuleblad van 7 bladsye.

037Q1A2106

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik word.
4. Vrae mag in enige volgorde beantwoord word, maar onderafdelings van vrae moet bymekaar gehou word.
5. Toon alle tussenstappe.
6. Al die formules wat gebruik word, moet neergeskryf word.
7. Alle grafieke moet groot, netjies en duidelik wees en mag in potlood gedoen word.
8. Gebruik slegs 'n swart of blou pen.
9. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 Gegee: $z = a^{3x-2y}$

Bepaal:

1.1.1 $\frac{\partial z}{\partial x}$ (1)

1.1.2 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (2)

1.2 Gegee: Die parametriese vergelykings $x = \frac{1}{1+2t}$ en $y = 1+2t$

Bereken, ten opsigte van t:

1.2.1 $\frac{dy}{dx}$ (2)

1.2.2 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (1)

[6]

VRAAG 2

Bepaal: $\int y\,dx$

2.1 $y = \sin^3 2x\left(1-\sin^2 2x\right)$ (5)

2.2 $y = \tan^3 3x \sec^4 3x$ (4)

2.3 $y = (x+1)^2 \ln(x+1)^2$ (4)

2.4 $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - 3x - x^2}}$ (4)

2.5 $y = \sin^2 2x - \cos^2 2x$ (1)

[18]

VRAAG 3

Gebruik parsieelbreuke om die volgende heelgetalle te bereken:

3.1 $\int \frac{3x^2-6x-1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}dx$ (6)

3.2 $\int \frac{x^3-10x-15}{x^2-9}dx$ (6)
[12]

VRAAG 4

4.1 Bepaal die algemene oplossing van:

$$\frac{dy}{dx}+y\sec x = x\cos x$$ (6)

4.2 Bereken die partikuliere oplossing van:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+12y=0 \text{ as } y=2 \text{ wanneer } x=0 \text{ en } \frac{dy}{dx}=6+4\sqrt{3} \text{ wanneer } x=0$$ (6)
[12]

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Bereken die snypunte van die kromme $y=5x-x^2$ en lyn $y=5-x$

Maak 'n netjiese skets van die grafieke en dui die oppervlakte wat deur die grafieke begrens word duidelik aan. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die oppervlakte en die volume te bereken wanneer die gebied om die *y*-as roteer. (7)

5.1.2 Bereken die begrensde oppervlakte wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word. (3)

5.1.3 Bereken die volume wat gegenereer word wanneer die gebonde oppervlakte, wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word, om die *y*-as roteer. (4)

5.2 5.2.1 Maak 'n netjiese skets om die oppervlakte wat deur die kromme $y=\ln x$, die x en *y*-asse en lyn $y=2$ begrens word, te toon. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die oppervlakte te bereken. (2)

5.2.2 Bereken die oppervlakte wat in VRAAG 5.2.1 geskryf word. Bereken die oppervlaktemoment om die x-as van die gebied wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is asook die y-koördinaat van die sentroïed. (6)

5.3 5.3.1 Teken die grafiek van $y = \tan x$ vir $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Toon die oppervlakte wat deur die grafiek begrens word, die x-as en lyn $x = \dfrac{\pi}{4}$

Gebruik 'n verteenwoordigende strook LOODREG op die x-as.r (2)

5.3.2 Bereken die traagheidsmoment om die *x*-as wanneer die oppervlakte wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is om die *x*-as roteer. (6)

5.4 5.4.1 Bepaal die *x*-afsnit en die *y*-afsnit van die grafiek $y = \dfrac{4}{9}x^2 - 4$.

Maak 'n netjiese skets van die grafiek $y = \dfrac{4}{9}x^2 - 4$ vir $-3 \le x \le 3$

Toon die oppervlakte in die vierde kwadrant wat deur die grafiek begrens word, die *y*-as en lyn *y* = -2. Gebruik 'n verteenwoordigende strook LOODREG op die *y*-as. (4)

5.4.2 Bereken die tweede oppervlaktemoment om die oppervlakte om die *x*-as wat in VRAAG 5.4.1 beskryf is. (6)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme wat deur $y = \left(3 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ vanaf $x = 0$ na $x = 2$ gegee word. (6)

6.2 Die deel van die kromme $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ tussen die parallellyne $y = a$ en $y = a + \square$ word om die *y*-as geroteer.

Bereken die buite-oppervlakte wat geskep is. (6)

[12]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2A$

$\cos^2 A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2} [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = \tfrac{1}{2} [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2} [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = \tfrac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\mathrm{cosec}\ x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

 Blaai om asseblief

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\ f(x)$	$\int\ f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$
ax^n	$a\ \frac{d}{dx}\ x^n$	$a\ \int x^n\ dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}\ (ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}\ (dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}\ ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\ \frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}\ f(x)$	-
$\sin ax$	$a\cos ax$	$-\ \frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a\sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\ln\ [\sec\ (ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\ \mathrm{cosec}^2\ ax$	$\frac{1}{a}\ln\ [\sin\ (ax)]+C$
$\sec ax$	$a\sec ax\tan ax$	$\frac{1}{a}\ln\ [\sec ax+\tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\ ax$	$-a\ \mathrm{cosec}\ ax\cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\ f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\operatorname{cosec}^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \tan f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\operatorname{cosec} f(x)$	$-\operatorname{cosec} f(x) \cot f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\operatorname{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax)-x+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\cot^2(ax)$	-	$-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

$\int \left[f(x)\right]^n\, f'(x)\, dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\, f(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a + bx}{a - bx}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$

Toepassings van integrasie

OPPERVLAKTES

$A_x = \int_a^b y\,dx \;;\; A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$

$A_y = \int_a^b x\,dy \;;\; A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$

VOLUMES

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \; ; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \; ; V_x = 2\pi \int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \; ; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \; ; V_y = 2\pi \int_a^b xydx$$

OPPERVLAKTEMOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROÏED

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A} \; ; \; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE OPPERVLAKTEMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

EWEWIGSPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN

$$I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$$

SIRKULÊRE LAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2}\rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2}\rho\pi \int_a^b x^4 dy$$

MIDDELPUNT VAN VLOEISTOFDRUK ('CENTRE OF FLUID PRESSURE')

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \dots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\,(cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \dots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

$$A_x = \int_{u1}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\; du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx}\, dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$