higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

T1040**(A)**(J25)T

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186

25 Julie 2018 (X-Vraestel)
09:00–12:00

Sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord AL die vrae.
2. Lees AL die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Beantwoord die vrae in enige volgorde, maar hou onderafdelings van vrae bymekaar.
5. Toon AL die tussenstappe.
6. Rond ALLE berekening af tot DRIE desimale.
7. Skryf AL die formules wat jy gebruik het neer.
8. Beantwoord vrae met 'n pen in BLOU of SWART ink.
9. Werk netjies.

VRAAG 1

1.1 Gegewe $z = \cos^2\left(x^2 y^2\right)$.

Bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. (2)

1.2 Gegewe $z = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}$.

Bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (1)

1.3 Die sye van 'n reghoekige driehoek is x en y, terwyl die skuinssy r is.

Bereken die benaderde verandering in oppervlakte as x van 3 tot 3,2 vermeerder en y van 4 tot 3,8 verminder. (3)

[6]

VRAAG 2

Bepaal $\int$ y dx as:

2.1 $y = x^2 \ln x^2$ (3)

2.2 $y = x\tan^2 x$ (3)

2.3 $y = \dfrac{1}{x(x-1)+1}$ (4)

2.4 $y = \dfrac{1}{\tan^4 \dfrac{x}{4}}$ (4)

2.5 $y = \sin^5 3x\cos^3 3x$ (4)

[18]

VRAAG 3

Integreer die volgende met behulp van parsieelbreuke:

3.1 $\int \frac{3x^2-3x+7}{(3x+1)(x^2-2x+2)}dx$ (6)

3.2 $\int \frac{x^2-7x+15}{(x^3-6x^2+9x)}dx$ (6)

[12]

VRAAG 4

4.1 Bereken die partikuliere oplossing vir $\ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}-\cos x=0$ as $x=\frac{\pi}{3}$ en $y=2$. (6)

4.2 Bepaal die algemene oplossing vir $3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=x^2-x+5$. (6)

[12]

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Maak 'n skets van die grafieke van $y=2\ln\frac{x}{2}$. Toon die gebied wat deur die grafiek begrens word, die lyne $x=0$, $y=0$ en $y=3$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy gebruik om die volume te bereken wanneer die begrensde gebied om die *x*-as roteer. (3)

5.1.2 Bereken die volume van die omwentelingsliggaam wanneer die gebied, wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word, om die *x*-as roteer. (4)

5.1.3 Bereken die volumemoment om die *y*-as van die ruimteliggaam wat gegenereer word wanneer die gebied, wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word, om die *x*-as roteer. Bereken ook die afstand van die swaartepunt vanaf die *y*-as van die ruimteliggaam. (5)

5.2 5.2.1 Bepaal die snydingspunte van $y=\frac{1}{4}x^2$ en $y=\frac{1}{4}(x+2)$.

Maak 'n skets van die twee grafieke en toon die gebied wat tussen die grafieke ingesluit word. Toon ook die verteenwoordigende strook/element, loodreg op die *x*-as, wat jy gebruik het om die ingeslote gebied te bereken. (3)

5.2.2 Bereken die gebied wat in VRAAG 5.2.1 beskryf word. (4)

5.2.3 Bereken die y-ordinaat van die sentroïed van die gebied wat in VRAAG 5.2.1 beskryf word. (5)

5.3 5.3.1 Maak 'n skets van die grafiek van $y = e^{-x}$. Toon die gebied wat deur die grafiek begrens word, die lyne $x = 1$, $x = 0$ en $y = 0$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy vir jou berekeninge gebruik het. (2)

5.3.2 Bereken die traagheidsmoment ('moment of inertia') om die x-as van die ruimteliggaam wat verkry word wanneer die gebied, wat in VRAAG 5.3.1 beskryf word, om die x-as roteer. (4)

5.4 5.4.1 'n Skuifsluis in die vorm van 'n gelykbenige driehoek word met die toppunt daarvan na onder vertikaal in 'n waterkanaal met dieselfde vorm geplaas. Die hoogte van die sluis is 4 m en die diepte van die water in die kanaal is 5 m. Die sluis is 4 m breed. Maak 'n netjiese skets van die dwarsdeursnee van die kanaal en toon die verteenwoordigende strook wat jy vir jou berekeninge gebruik het. (2)

5.4.2 Bereken, met behulp van integrasie, die areamoment van die skuifsluis om die waterhoogte. (4)

5.4.3 Bereken die tweede areamoment van die skuifsluis om die waterhoogte met behulp van integrasie asook die diepte van die drukpunt op die sluis. (4)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme, $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, van punt $x = 1$ tot $x = 2$. (6)

6.2 Bereken die oppervlakarea wat gegenereer word wanneer die kromme, $y = \cos x \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, om die x-as roteer. (6)

[12]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige ander toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\int f(x)dx$
x^{n}	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$
ax^{n}	$a\frac{d}{dx}x^{n}$	$a\int x^{n}\,dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}(ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}.\frac{d}{dx}ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x)$	-
$\sin ax$	$a\cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a\sec^{2}ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec(ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\,\mathrm{cosec}^{2}ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sin(ax)]+C$
$\sec ax$	$a\sec ax\tan ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec ax+\tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\,ax$	$-a\,\mathrm{cosec}\,ax\cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\mathrm{cosec}^2 f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \tan f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\mathrm{cosec}\, f(x)$	$-\mathrm{cosec}\, f(x) \cot f(x) \,.\, f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\mathrm{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax) - x + C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\cot^2 (ax)$	-	$-\frac{1}{a} \cot(ax) - x + C$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\, f(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{bx}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{a^2}{2b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left(\frac{a+bx}{a-bx} \right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2} \ln \left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2} \right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b} \ln \left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2} \right] + C$$

Integrasietoepassings

OPPERVLAKTES (AREAS)

$$A_x = \int_a^b y\,dx\ ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A_y = \int_a^b x\,dy\ ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$$

VOLUMES

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \; ; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \; ; V_x = 2\pi \int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \; ; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \; ; V_y = 2\pi \int_a^b xydx$$

AREAMOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROÏED

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A} \; ; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE AREAMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

SWAARTEPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = Digtheid × Volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKELVORMIGE LAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b x^4 dy$$

VLOEISTOFDRUKPUNT

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\,(cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_x = \int_{u1}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx}\, dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$