higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

T1040**(A)**(J29)T

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186)

29 Julie 2019 (X-Vraestel)
09:00–12:00

Sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord AL die vrae.
2. Lees AL die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Hou onderafdelings van vrae bymekaar.
5. Rond ALLE berekening af tot DRIE desimale.
6. Gebruik die korrekte simbole en eenhede.
7. Begin ELKE vraag op 'n NUWE bladsy.
8. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 Gegewe: $z = x^2 + 2xy + y^2$.

Bewys dat $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$. (3)

1.2 $Gegewe\!: x = \sqrt{t}\ ; y = \frac{1}{\sqrt{t}}.$

$Bepaal\ \frac{d^2y}{dx^2}\ in\ terme\ van\ t.$ (3)

[6]

VRAAG 2

Bepaal $\int ydx$ as:

2.1 $y = x^2 e^{3x}$ (3)

2.2 $y = \cos^5 \frac{x}{5}$ (4)

2.3 $y = \tan^3 x \sec x$ (3)

2.4 $y = \frac{1}{9 - 4x - x^2}$ (4)

2.5 $y = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a}$ (4)

[18]

VRAAG 3

Gebruik parsiële breuke om die volgende integrale te bereken:

3.1 $\int \frac{8x^2 - 2x + 3}{2x^3 - 2x^2 + x - 1}dx$

3.2 $\int \frac{(3x+2)(2x-3)}{(3x+2)^2 - (2x-3)^2}dx$

(2 × 6) **[12]**

VRAAG 4

Bepaal die algemene oplossing vir elkeen van die volgende:

4.1 $\dfrac{dy}{dx} = \tan x - y\cot x$

4.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2e^{2x}$

(2 × 6) **[12]**

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Trek die grafieke van $y = \sin x$ and $y = \cos x$ for $0 \leq x \leq \pi$. Toon die oppervlakte wat begrens word deur die krommes van $x = \dfrac{\pi}{2}$ to $x = \pi$. Toon die verteenwoordigende strook wat jy sal gebruik om die begrensde oppervlakte te bereken. en tot (3)

5.1.2 Bereken die oppervlakte wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word. (4)

5.1.3 Bereken die x-koördinaat van die sentroïed van die oppervlakte wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word. (6)

5.2 5.2.1 Trek die grafiek van $x^2 + y^2 = 25$. Toon die oppervlakte in die eerste kwadrant van die grafiek tussen die x-as en die y-as. Toon die verteenwoordigende strook wat jy sal gebruik om die volume te bereken van die ruimteliggaam wat gegenereer word wanneer hierdie oppervlakte om die x-as roteer. (2)

5.2.2 Bereken die volume wat gegenereer word wanneer die oppervlakte, wat in VRAAG 5.1.1 beskryf word, om die x-as roteer. (3)

5.2.3 Bereken die x-koördinate van die swaartepunt van die ruimteliggaam wat gegenereer word wanneer die oppervlakte in VRAAG 5.2.1 om die x-as roteer. (4)

5.3 5.3.1 Trek 'n netjiese grafiek van $y = -x^2 + 3x - 2$. Toon die oppervlakte wat deur die grafiek en die x-as begrens word. Toon die verteenwoordigende strook wat jy sal gebruik om die oppervlakte te bereken. (2)

5.3.2 Bereken die oppervlakte wat in VRAAG 5.3.1 beskryf word. (3)

5.3.3 Bereken die tweede areamoment om die y-as van die oppervlakte wat in VRAAG 5.3.1 beskryf word en druk die antwoord in terme van oppervlakte uit. (4)

5.4 5.4.1 ’n Halfsirkelvormige plaat met ’n straal van 5 m word in water gedompel, met die wyer ent daarvan wat op die watervlak lê.

Maak ’n netjiese skets van die plaat en toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die diepte van die sentrum van druk op die plaat te bereken. (2)

5.4.2 Bereken die areamoment van die plaat om die watervlak. (6)

5.4.3 Bereken die diepte van die sentrum van druk op die plaat as die tweede areamoment van die plaat om die watervlak as 245,437 m^4 gegee word. (1)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme $2y = x^2\ tussen (2; 2) en\ (4; 8)$ (6)

6.2 Bereken die buiteoppervlakte wat gegenereer word wanneer die kromme $x = \frac{1}{9}y^2\ vanaf\ y = 0\ tot\ y = 6$ om die *x*-as roteer. (6)

[12]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \mathrm{cosec}^2\, x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$

$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\mathrm{cosec}\, x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$
ax^n	$a\frac{d}{dx}x^n$	$a\int x^n\,dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}(ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}.\frac{d}{dx}ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x)$	-
$\sin ax$	$a\cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a\sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec(ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\,\mathrm{cosec}^2\,ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sin(ax)]+C$
$\sec ax$	$a\sec ax\tan ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec ax+\tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\,ax$	$-a\,\mathrm{cosec}\,ax\cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\text{cosec}^2 f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x)\tan f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\text{cosec}\, f(x)$	$-\text{cosec}\, f(x)\cot f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\text{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax)-x+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\cot^2(ax)$	-	$-\frac{1}{a} \cot(ax) - x + C$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{bx}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{a^2}{2b} \sin^{-1} \frac{bx}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left(\frac{a + bx}{a - bx}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2} \ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b} \ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$$

Toepassings van integrasie

OPPERVLAKTES (AREAS)

$$A_x = \int_a^b y\,dx\ ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A_y = \int_a^b x\,dy\ ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$$

VOLUMES

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx \; ; V_x = \pi\int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \; ; V_x = 2\pi\int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy \; ; V_y = \pi\int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \; ; V_y = 2\pi\int_a^b xydx$$

AREAMOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROÏED

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A} \; ; \; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE AREAMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \qquad ; \qquad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \qquad ; \qquad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

SWAARTEPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = Digtheid × Volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKELLAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b x^4 dy$$

VLOEISTOFDRUKPUNT

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \dots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\ (cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \dots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \; dy$$

$$A_x = \int_{u1}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \; du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \; du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \; dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \; du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \square \; ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} \; dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$