higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186)

27 Julie 2021 (X-vraestel)
09:00–12:00

Tekeninstrumente en wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

053Q1G2127

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Vrae kan in enige volgorde beantwoord word, maar onderafdelings van vrae moet bymekaar gehou word.
5. Toon alle tussenstappe.
6. Skryf alle formules wat gebruik word neer.
7. Gebruik slegs 'n blou of swart pen.
8. Skryf netjies en leesbaar

VRAAG 1

1.1 Indien $z=\sqrt{x^2-y^2}$ prove that $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}$ (3)

1.2 Gegee $x=6\cos\theta$ en $y=6\sin\theta$ bepaal , in terme van θ

1.2.1 $\dfrac{dy}{dx}$ (2)

1.2.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (1)

[6]

VRAAG 2

Bepaal $\int y\,dx$ indien.

2.1 $y=\left(1+\tan^2 3x\right)\left(\sec^2 3x-1\right)$ (2)

2.2 $y=\sin^{-1} bx$ (5)

2.3 $y=\sqrt{6x-x^2}$ (4)

2.4 $y=\cos^4\left(\dfrac{3}{2}x\right)$ (4)

2.5 $y=x\tan x+\ln\sec x$ (3)

[18]

VRAAG 3

Gebruik parsieëlbreuke (‘partial fractions’) om die volgende integrale te bereken:

3.1 $\displaystyle\int\frac{(x+3)(x-4)}{2x^3-x^2-6x}\,dx$ (6)

3.2 $\displaystyle\int\frac{3x^2+16x+26}{(x-2)(x^2+3x+4)}\,dx$ (6)

[12]

VRAAG 4

4.1 Bereken die partikulêre oplossing van $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x \ln x} = \frac{1}{x}$ by (2; 0) (6)

4.2 Bepaal die algemene oplossing van $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 2e^{-3x}$ (6)

[12]

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Teken 'n netjiese skets van die grafieke van

$y = sin\, x$ en $y = 1 + sin\, x$ vir $0 \leq x \leq \pi$

Toon die area wat deur die grafieke begrens word, die y-as en die $x = \pi$ lyn . Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume van die soliede te bereken wat gegenereer word wanneer hierdie area om die x-as draai. (2)

5.1.2 Bereken die volume wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is. (5)

5.1.3 Bereken die volume moment om die y-as en die afstand van die swaartepunt van die y-as. (6)

5.2 5.2.1 Teken 'n netjiese skets van die grafieke van $y = e^x$en $y = e^{-x}$.

Toon die area wat deur die grafieke begrens word en die lyne $x = 1$ en $x = 3$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die area te bereken. (2)

5.2.2 Bereken die area wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is. (2)

5.2.3 Bereken die area moment om die y-as van die area wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is en die afstand van die sentroïed van die y-as. (6)

5.3 5.3.1 Die lyn $y = 4$ sny die grafiek van $y = (x - 3)^2$ by die punte $(1; 4)$ en $(5; 4)$

Teken die grafiek en toon die area wat deur die grafiek begrens word en die lyn y = 4. Gebruik die verteenwoordigende strook LOODREG op die x-as. (2)

5.3.2 Bereken die area wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is. (3)

5.3.3 Bereken die tweede moment van die area om die y-as van die area wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is. (4)

5.4 5.4.1 Die deursnit van 'n waterkanaal is in die vorm van 'n trapesium. 'n Sluishek van 3 m is vertikaal in die kanaal geplaas. Die hek is 4 m breed aan die onderkant en 8 m breed aan die bokant. Die hoogte van die watervlak in die kanaal is 5 m.

Teken 'n netjiese skets van die sluishek en toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die eerste moment van die area van die hek op die watervlak te bereken. (3)

5.4.2 Bereken die eerste moment van die area van die hek op die watervlak. (4)

5.4.3 Bereken die diepte van die drukwerkpunt op die sluishek indien die tweede moment van die hek se area op die watervlak 213 units^4 is. (1)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die kromme $x = \frac{y^2}{4}$ from $y = 0$ to $y = 4$ (6)

6.2 Bereken die oppervlakarea wat geskep word as die kurwe $y = 2\sin x$ van $x = \frac{\pi}{2}$ tot $x = \pi$ om die x-as roteer. (6)

[12]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige ander toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2\, x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$

$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\text{cosec}\, x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n \neq -1)$
ax^n	$a\, \frac{d}{dx}\, x^n$	$a \int x^n\, dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b}.\frac{d}{dx}\, (ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}\left(ax+b\right)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a.\frac{d}{dx}\, (dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}\left(dx+e\right)}+C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}\, ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\, \frac{d}{dx}\, f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}\, f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}\, f(x)$	-
$\sin ax$	$a \cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a}+C$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}+C$
$\tan ax$	$a \sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\ln\,[\sec\,(ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\, \mathrm{cosec}^2\, ax$	$\frac{1}{a}\ln\,[\sin\,(ax)]+C$
$\sec ax$	$a \sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\ln\,[\sec ax + \tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\, ax$	$-a\, \mathrm{cosec}\, ax \cot ax$	$\frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\mathrm{cosec}^2 f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \tan f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\mathrm{cosec}\, f(x)$	$-\mathrm{cosec}\, f(x) \cot f(x)\ .\ f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\mathrm{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax) - x + C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\cot^2(ax)$	-	$-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$$

Toepassings van integrasie

AREAS

$$A_x = \int_a^b ydx\ ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

$$A_y = \int_a^b xdy\ ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy$$

VOLUMES

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx\ ;\ V_x = \pi\int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx\ ;\ V_x = 2\pi\int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi\int_a^b x^2dy\ ;\ V_y = \pi\int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right)dy\ ;\ V_y = 2\pi\int_a^b xydx$$

AREAMOMENTE

$$A_{m-x} = rdA \qquad A_{m-y} = rdA$$

SENTROÏEDE

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}\ ;\ \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE AREAMOMENTE

$$I_x = \int_a^b r^2dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

SWAARTEPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\,r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKELVORMIGE LAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b x^4 dy$$

VLOEISTOFDRUKPUNT

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\ (cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$A_x = \int_{u1}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore\ ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}\ dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$